A. Fr. Broens Litt. Hum. & S. S. Theol. Stud.

December 1832.

van den Schryver

OVER

DE ONMOGELIJKHEID

DER

KWADRATUUR DES CIRKELS,

DOCH WAARBIJ TEVENS

EENE NIEUWE MANIER,

OM TOT DEZELVE TE NADEREN,

GEGEVEN WORDT;

DOOR

Hendrik de Hartog,

OPENBAAR LEERAAR DER

WIS-, STERRE- EN ZEEVAART-KUNDE,

AAN HET *ATHENÆUM ILLUSTER*, *der Stad*

AMSTERDAM.

1827.

De Auteur erkent geene Exemplaren voor echt, dan die door hem zelven onderteekend zijn.

de Hartog.

De Kwadratuur des Cirkels is in naam meest overal bekend, doch waarin dezelve eigenlijk bestaat, niet zoo algemeen. Ik dien daarover dus vooraf een woord te zeggen.

Men weet, dat men in de Meetkunde handelt over driederlei soorten van Grootheden, als Lijnen, Vlakken en Ligchamen; derzelver hoegrootheden moeten derhalve ook door driederlei soorten van eenheden uitgedrukt worden. Men neemt dus de lengte van eene zeer bekende Lijn voor maat of eenheid aan, en drukt de lengte van iedere andere Lijn door een getal van zulke eenheden uit; en dit zijn dan eigenlijk lengte-eenheden. De grootheid der vlakken duidt men aan door een getal vierkanten of kwadraten van deze eenheid, en dit zijn kwadraat-eenheden, en den inhoud der Ligchamen door een getal Teerlingen of Cuben van deze eenheid, en dit noemt men Cubiek-eenheden.

Nu bestaat de kwadratuur des Cirkels däärin, dat men de lengte der middellijn van den Cirkel wetende, deszelfs inhoud kan aanduiden; doch de lengte der middellijn kan niet anders dan door lengte-

eenheden opgegeven worden, daar de inhoud des Cirkels een Vlak zijnde, door kwadraat-eenheden moet worden uitgedrukt, en het is van daar, dat men het vinden van het getal kwadraat-eenheden, welke den inhoud des Cirkels groot is, noemt: het vinden van de kwadratuur des Cirkels.

Doch, vermits men uit de Meetkunde weet, dat den halven middellijn des Cirkels met den halven omtrek gemultipliceerd, den inhoud van den Cirkel geeft, is het genoeg, dat men de middellijn van den Cirkel wetende, zijn' omtrek kan vinden, of slechts alleen maar de proportie tusschen de middellijn en zijn' omtrek weet aan te wijzen, en dit wordt meestal, ofschoon meer oneigen, door het vinden der kwadratuur des Cirkels verstaan. Bij nadering is deze proportie reeds voorlang zoo nabij gevonden, dat men in de praktijk niets meer kan verlangen; doch men vraagt het volmaakte of een bewijs, dat zulks onmogelijk is; men heeft dit zelfs door groote premiën aangedrongen, en hierdoor de pogingen om deze vraag te beantwoorden verdubbeld; doch vruchteloos. De voornaamste Wiskundigen hebben derhalve reeds lang geoordeeld, dat zulks onmogelijk zij; doch, mijns wetens, zonder afdoend bewijs: het zoeken daarnaar blijft dus nog voortduren; en om dit te doen ophouden, hoop ik, dat het volgende zal kunnen dienen. Dan ter zake.

Ik zal beginnen met eene generale Formule te zoeken, door welke de proportie wordt uitgedrukt, welke er tusschen de middellijn van eenen Cirkel en den omtrek van een' gelijkzijdigen veelhoek, in den-

zelven beschreven, plaats heeft, waardoor dan ook de proportie van de middellijn des Cirkels tot zijnen omtrek zal uitgedrukt worden, omdat de Cirkel als de laatste van alle veelhoeken, welken men in denzelven beschrijven kan, moet aangemerkt worden.

Men beschouwe te dien einde de Figuur hier achter geplaatst, waarin BD eene koorde van een' Cirkel verbeeldt, hoedanig men stelle, dat er een getal n in den geheelen omtrek van den Cirkel kunne getrokken worden. Zoo is BD eene zijde van een' gelijkzijdige n hoek in den Cirkel beschreven. Voorts de Perpendiculair DE op de middellijn AB neêrgelaten zijnde, neem ik de lengte van BE voor de eenheid aan, en stelle, dat de middellijn AB een getal m zulke eenheden lang is.

Vervolgens ziet men, dat de driehoek ABD in eenen halven Cirkel staande, in D regthoekig is, en met den regthoekigen driehoek BDE gelijkvormig moet zijn, omdat ze beide nog den hoek in B gemeen, en bij gevolg den derden hoek gelijk moeten hebben, dewijl de drie hoeken van eenen driehoek altijd te zamen 180 graden uitmaken.

Men heeft dus:

$$AB : BD = BD : BE,$$
$$\text{dat is } m : BD = BD : 1,$$
$$\text{dus } \overline{BD}^2 = m,$$
$$\text{en } BD = \sqrt{m}.$$

Bij gevolg de omtrek van den veelhoek gelijk $n\sqrt{m}$; dus staat de omtrek van den veelhoek tot de middellijn des Cirkels, in welken hij staat, gelijk $n\sqrt{m}$ tot m, of verkleind.

De omtrek van den veelhoek tot de middellijn des Cirkels, gelijk n tot $\sqrt{m}$.

Wanneer men nu BE of onze eenheid oneindig klein neemt, zal de koorde BD met den boog BHD ineen smelten, en de veelhoek zal in den Cirkel veranderen, en dus zal men ook hebben:

De omtrek des Cirkels staat tot zijne middellijn, gelijk n tot $\sqrt{m}$. Dat is immensurabel of onmeetbaar, tenzij m een rationaal kwadraat getal ware; doch ik zal het tegendeel bewijzen.

De m is in dit geval een oneindig groot getal, want dezelve bevat eene oneindig groote hoeveelheid van oneindig kleine eenheden, en is om die reden tevens een getal zonder breuk; want naar evenredigheid dat de maat of eenheid, waarmede men iets meet, kleiner genomen wordt, is de kans, dat men juist in geheele getallen zonder breuk zal uitkomen, grooter, dan dat men die maat of eenheid grooter genomen had. Bij voorbeeld: zoo men een' Palm voor maat of eenheid nam, zoude men in het meten van eene Lijn tienmaal meer kans hebben, om juist in een geheel getal van eenheden uit te komen, dan dat men eene El voor eenheid genomen had; zoo men een' Duim voor eenheid nam, tienmaal meer dan een' Palm; eene Streep tienmaal meer dan een' Duim, enz. Derhalve eene oneindig kleine Lijn voor eenheid nemende, moet men altijd in geheelen uitkomen; want zoo er nog iets overschoot, moest dit nog kleiner dan deze eenheid zijn, welke reeds oneindig klein genomen is, hetgeen eene contradictie bevat, en dus onmogelijk is.

De m is derhalve een oneindig groot geheel getal, zonder breuk. Maar als men de reeks der natuurlijke getallen 1, 2, 3 enz., tot in het oneindige nagaat, zal men bevinden, dat dezelve bijna alle in de plaats van m, onder het kwadraat wortelteeken gesteld, irrationale getallen zijn, en dat daarin de kwadraat-getallen van tijd tot tijd al minder en minder voorkomen, en hoe langer hoe verder van elkander afstaan, en dus daaruit in het oneindige geheel moeten verdwijnen.

Bij voorbeeld: op het kwadraat-getal 16 volgen 8 irrationale getallen, eer men tot het volgende kwadraat 25 komt; op het kwadraat-getal 1000,000 volgen 2000 irrationale getallen eer men weder een kwadraat ontmoet, en op dit kwadraat-getal 1000,000,000,000 zouden 2 Millioenen irrationale getallen volgen, eer er wederom een kwadraat-getal zoude kunnen komen, en in het algemeen volgen altijd op ieder kwadraat-getal tweemaal zoo veel irrationale getallen, als de wortel uit dit kwadraat-getal groot is, eer men wederom een kwadraat-getal kan ontmoeten, en dus, hoe grooter het getal wordt, hoe kleiner de mogelijkheid wordt, dat hetzelve een kwadraat-getal zijn kan, en het getal oneindig groot wordende, wordt de mogelijkheid oneindig klein, dat is onmogelijk: derhalve kunnen aldaar geene rationale kwadraten meer plaats vinden, want de wet, naar welke zij voortgaan, is onveranderlijk, en de besluiten, daaruit afgeleid, al kan men dezelve tot in het oneindige niet volgen, altijd even zeker als de strengste wiskundige betoogingen, welke men

met eindige grootheden kan daarstellen, waaruit derhalve blijkt, dat de kwadratuur des Cirkels onmogelijk is.

Misschien zal iemand zeggen: ofschoon ik moet toestaan, dat de rede, welke de middellijn des Cirkels tot zijnen omtrek heeft, door een oneindig groot getal van oneindig kleine eenheden uitgedrukt, irrationaal is, durf ik echter daaruit niet voor vast besluiten, dat dit door een eindig getal van eindige eenheden even zeker moet doorgaan.

Dan ik vraag, zoo de rede, welke de middellijn des Cirkels tot zijnen omtrek heeft, in een eindig getal van eindige eenheden irrationaal ware uitgedrukt, of dit ook niet met een oneindig groot getal van oneindig kleine eenheden zoude moeten plaats hebben? Men zal zeggen, ja, want die rede blijft onveranderlijk dezelfde.

Nu zeg ik, dat zulks dan ook bij omkeering moet waar zijn, namelijk: dat de rede, welke de middellijn des Cirkels tot zijnen omtrek heeft, in een oneindig groot getal van oneindig kleine eenheden uitgedrukt, bewezen is irrationaal te zijn, zulks ook noodzakelijk met een eindig getal van eindige eenheden moet waar wezen; want zoo die rede met een eindig getal van eindige eenheden rationaal kon uitgedrukt worden, zoude men met hetzelfde regt kunnen zeggen, dat zulks ook met een oneindig groot getal van oneindig kleine eenheden kon geschieden; maar men heeft bewezen, dat zulks in het oneindige onmogelijk is: derhalve kan dit ook in het eindige geen plaats hebben.

En hiermede acht ik de onmogelijkheid van de kwadratuur des Cirkels bewezen te hebben.

Men zoude voor minder geoefenden in de Wiskunde dus ook kunnen redeneeren, ofschoon iets minder streng. Men heeft, namelijk, gevonden, dat de omtrek van den veelhoek staat tot de middellijn des Cirkels, in welken hij beschreven is, gelijk n tot $\sqrt{m}$. Zoo dikwijls derhalve de kwadraat–wortel uit m rationaal is, staat de omtrek van den veelhoek tot de middellijn des Cirkels in eene rationale evenredigheid; maar hoe grooter het getal m wordt, hoe minder het kan gebeuren, dat m een rationaal kwadraat zij. Derhalve, hoe grooter m wordt, hoe minder het mogelijk wordt, dat de omtrek van den veelhoek tot de middellijn des Cirkels in eene rationale evenredigheid kan zijn; zoo m derhalve oneindig groot wordt, moet zulks geheel onmogelijk worden; maar als m oneindig groot wordt, verandert de omtrek van den veelhoek in den omtrek des Cirkels: derhalve is het onmogelijk, dat de omtrek des Cirkels tot zijne middellijn in eene rationale evenredigheid kan wezen, maar moet noodzakelijk irrationaal zijn.

Ik geloof, dat men in het doorlezen van het voorgaande veel licht zal ontvangen, zoo men den Cirkel, waarover wij handelen, in zijne gedachten zeer groot stelt, en dit kan men doen zoo groot men wil; is de omtrek der aarde niet genoeg? men stelle denzelven om de geheele wereld te gaan; men zal zich dan met de denkbeelden van oneindig groot en oneindig klein des te beter bevredigen.

Doch, men zal het beste doen, bij de aarde te blijven; men is daarmede het meeste bekend, en al te groot zoude misschien evenveel verdonkeren, als al te klein.

Men neme derhalve den omtrek der aarde voor onzen Cirkel aan, en men zal de kracht der bewijzen des te beter vatten, en dus zich zelven van de volstrekte onmogelijkheid, dat de kwadratuur des Cirkels ooit kan gevonden worden, overtuigd houden.

In het vervolg zal men zich derhalve, even als voorheen, met aannadering moeten vergenoegen, en hiertoe geeft onze Formule tevens een allergemakkelijkst middel aan de hand, waardoor men zulks als spelende, genoegzaam zonder eenige berekening, zal kunnen doen; dit moet ik nog kortelijk aantoonen.

Men zie wederom de figuur, in welke BCF een kwadrant van een Cirkel is; de Lijn FG parallel met AB, en de Lijn CG regthoekig door het midden der koorde BD getrokken zijnde, ziet men ligtelijk, dat de driehoek FCG gelijkvormig aan den driehoek CBK zij; want behalve dat ze beide regthoekig zijn, is nog de hoek FGC van den eenen driehoek gelijk den hoek BCK van den anderen, als zijnde beide overhandsche hoeken tusschen parallelle Lijnen: derhalve moeten ook hunne derde hoeken gelijk zijn.

Maar deze laatste driehoek CBK is ook gelijkvormig met den driehoek BDE, want ook beide regthoekig zijnde, hebben zij den hoek CBD gemeen,

en dus beide de anderen even groot, waaruit volgt, dat ook de driehoek FCG gelijkvormig aan den driehoek BDE zijn moet; derhalve heeft men,

BE : BD = CF : CG,

dat is $1 : \sqrt{m}$ = Radius : Cosecans van den ⌒ BH.

Maar de Radius tot de Cosecans van onzen Cirkel staan in dezelfde proportie als de Radius tot de Cosecans van de Sinus-Tafel; men kan derhalve deze laatste gebruiken.

En als men dan nog de Radius der Sinus-Tafel gelijk BE gelijk onze eenheid neemt, wordt de proportie $1 : \sqrt{m} = 1$: de Cosecans van den ⌒ BH.

Maar de eerste term gelijk aan den derden zijnde, moet ook de tweede gelijk aan den vierden zijn, dus $\sqrt{m}$ = de Cosecans van den ⌒ BH.

Maar te voren is gevonden:

De omtrek van den veelhoek staat tot de middellijn des Cirkels, gelijk n tot $\sqrt{m}$; doch n is het getal zijden van den veelhoek in den Cirkel beschreven, en de Cosecans van den ⌒ BH is de Cosecans van den halven boog, welke eene der zijden van den veelhoek bespant; men kan dus nu schrijven: de omtrek van den veelhoek, in den Cirkel beschreven, staat tot deszelfs middellijn, gelijk het getal der zijden van den veelhoek tot de Cosecans van den halven boog, welke eene dier zijden bespant.

Wanneer men derhalve de proportie van den omtrek van den veelhoek tot de middellijn des Cirkels, in welke hij staat, of, dat hetzelfde is, wanneer men de proportie van den omtrek des Cirkels tot zijne middellijn bij nadering wil vinden, neemt men

voor den omtrek het getal der zijden, welke den veelhoek bevat, en dan zal de Cosecans uit de Sinus-Tafel van het halve getal graden, welke den boog, die eene der zijden bespant, de middellijn des Cirkels aanwijzen, altijd indachtig zijnde, dat men de Radius der Sinus-Tafel gelijk 1 genomen heeft.

Vermits nu de omtrek van den veelhoek des te nader aan den omtrek des Cirkels komt, naarmate het getal zijner zijden grooter is, zal men den omtrek van den veelhoek, voor den omtrek des Cirkels houdende, des te minder van de ware proportie, welke de middellijn des Cirkels tot zijn' omtrek heeft, afwijken, naarmate men het getal der zijden van den veelhoek grooter neemt.

Ik zal dit door eenige voorbeelden ophelderen:

Stel dat men door middel van den gelijkzijdigen zeshoek, in den Cirkel beschreven, de proportie, welke den omtrek des Cirkels tot zijne middellijn heeft, wilde vinden, zoo is de omtrek 6, en de halve boog, welke eene dier zijden bespant, $\frac{180}{6}$, dat is 30 graden, wiens Cosecans 2 is; dus staat de omtrek van den zeshoek tot zijne middellijn als 6 tot 2, dat is als 3 tot 1, en derhalve bij nadering de omtrek des Cirkels tot zijne middellijn als 3 tot 1, hetgeen de kleinste proportie van den omtrek des Cirkels tot zijne middellijn in geheele getallen is.

Om verder, door middel van den 22 hoek, den omtrek des Cirkels tot zijne middellijn wat nader bij te vinden, stelt men den omtrek des Cirkels 22, en den halven boog, welke eene zijde bespant, is $\frac{180}{22}$, dat is omtrent 8 graden 11 minuten, wiens Cose-

cans nagenoeg 7 is, zoodat de omtrek des Cirkels tot zijne middellijn als 22 tot 7 zij, hetgeen de bekende proportie in heele getallen van Archimedes is.

Om al nader de proportie van den omtrek des Cirkels tot zijne middellijn te vinden, neem ik des 333 hoek, zoo is de omtrek des Cirkels 333 en de halve boog, welke eene zijde bespant, $\frac{180}{333}$, nagenoeg 32 minuten 26 seconden, wiens Cosecans 106 is: derhalve staat de omtrek des Cirkels tot zijne middellijn als 333 tot 106 zeer nabij.

Wanneer men den omtrek des Cirkels 355 stelt, zoo is deszelfs middellijn de Cosecans van $\frac{180}{355}$, dat is van 30 minuten 25 seconden, welke nagenoeg 113 is; derhalve moet de omtrek des Cirkels tot zijne middellijn staan als 355 tot 113, welke proportie zoo nabij is, dat men dezelve in de naauwkeurigste berekening kan gebruiken, en is daarom te merkwaardiger, dewijl men dezelve zoo gemakkelijk in het geheugen kan prenten; want als men de drie eerste onevene getallen of cijfers, 1, 3, 5, ieder tweemaal achter elkander schrijft, en dan door eene comma of lijn midden door deelt, zal de eene helft de middellijn en de andere den omtrek van het Cirkel uitdrukken, op deze wijze 1 1 3, 3 5 5.

Alle deze proportiën zijn door L. EULER in zijne Introductie in Analyzin infinitorum, *pag.* 319, reeds opgegeven; doch men ziet, dat dit ook de proportiën zijn, welke de omtrekken der veelhoeken tot hunne middellijnen hebben, maar die,

naar mate men het getal zijden grooter stelt, hoe langer hoe nader de proportie van de omtrekken der Cirkels tot hunne middellijnen uitdrukken.

Wanneer men verder de proportie van den omtrek des Cirkels tot zijne middellijn door middel van den 3600 hoek in den Cirkel beschreven wil vinden, zoo is de omtrek 3600 en de Middellijn gelijk de cosecant $\frac{180}{3600}$, gelijk de cosecant van 3 minuten gelijk 1145,9; dus staat de middellijn des Cirkels tot zijnen omtrek gelijk 11459 tot 36000, dat is als 1 tot 3,1416 nagenoeg, en wijkt geen honderd duizendste gedeelte van de waarheid af, en kan tevens met het meeste gemak in alle berekeningen gebruikt worden.

Eindelijk, om nog een voorbeeld te geven, men weet, dat de omtrek der aarde in 360 graden verdeeld wordt; men rekent iederen graad, onder de linie, op 20 uren gaans; derhalve is de geheele omtrek der aarde 7200 uren gaans, en bij gevolg derzelver middellijn de cosecans van $\frac{180}{7200}$, gelijk de cosecant van 1 minuut 30 seconden, gelijk 2291,83148, dat is nagenoeg 2292 uren gaans.

Men moet indachtig zijn, dat men, in het opzoeken der Cosecanten, op deze hoogte, alwaar de bogen zeer klein zijn, voor de Cosecans van den halven boog nagenoeg het dubbel van den geheelen boog moet nemen; ik heb dus voor die van $1\frac{1}{2}$ minuut, het dubbel van die van 3 minuten genomen. Men vindt hieruit derhalve zeer naauwkeurig, dat de middellijn des cirkels tot zijnen omtrek staat gelijk 2291,83148 tot 7200 of als

229183148 tot 720000000, dat is als 1 tot 3,141592, en dit wijkt geen millioenste deel van de waarheid af, en is evenwel, eigenlijk gezegd, slechts de proportie van de middellijn des Cirkels tot den omtrek van den 7200 hoek in denzelven beschreven, waaruit volgt, dat een uur gaans op de aarde voor eene regte Lijn kan gehouden worden, en dat dus, physisch gesproken, de tangens der aarde een Cirkel zoude zijn van een uur gaans middellijn.